

Abschlussbericht

für die
Manz Automation AG, Reutlingen

Modellierung der direkten kinematischen Transformation eines Delta-Roboters

04.04.2008



**Forschungsinstitut für Produktionstechnik
GmbH Braunschweig**
Langer Kamp 19 b
D-38106 Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht	2
2	Kinematik	3
2.1	Zwangsbedingungen	3
2.2	Direktes kinematisches Problem	5
3	Differentialkinematik	6
4	Implementierung und Validierung	8
A	Modellierung der vierten Achse	10
B	Computeralgebra-Skripte	10

1 Übersicht

Die modellbasierte Roboterregelung des vorangegangenen Projektes nutzt ein dynamisches Modell (DM) zur Berechnung von Vorsteuer-Momenten τ , das als Eingangsgrößen die Plattformpose \mathbf{p} mit ihren Ableitungen $\dot{\mathbf{p}}$ und $\ddot{\mathbf{p}}$ sowie die Antriebswinkel \mathbf{q} mit ihren Ableitungen $\dot{\mathbf{q}}$ und $\ddot{\mathbf{q}}$ benötigt. Um nun ein inverses dynamisches Modell zu realisieren, wurde ein inverses kinematisches Modell (IKM) vorgeschaltet. Das entsprechende Schema ist der Abbildung 1 zu entnehmen.

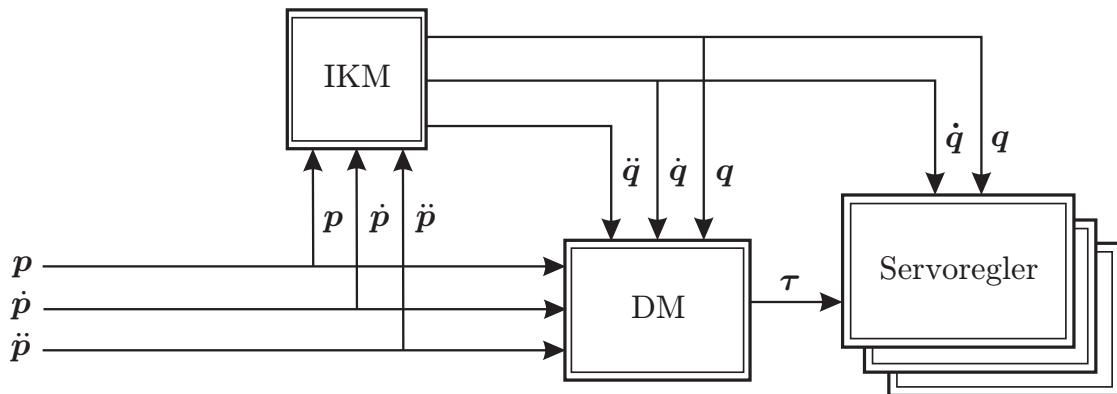


Abbildung 1: Verwendung des inversen kinematischen Modells zur Vorsteuerung

Um auch bei einer Beschreibung der Trajektorie in Gelenkwinkeln \mathbf{q} das dynamische Modell zu nutzen, muss ein entsprechendes direktes kinematisches Modell vorgeschaltet werden. Das resultierende Schema ist in Abbildung 2 zu finden. Dieses Modell wurde formuliert, als Erweiterung der bestehenden Software implementiert und durch Simulation validiert.

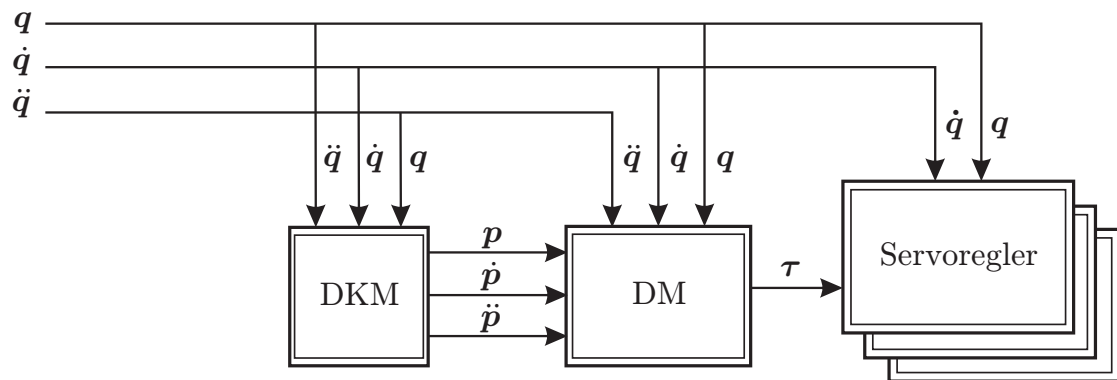


Abbildung 2: Verwendung des direkten kinematischen Modells zur Vorsteuerung

2 Kinematik

Abbildung 3 gibt eine Übersicht über die Modellierung des Roboters. Der Basiskoordinatensystem der Modellierung O liegt in der Ebene, die durch die Antriebsachsen aufgespannt wird, äquidistant zu den Schnittpunkten der Antriebsachsen mit den Längsachsen der Kurbeln A . Die Schnittpunkte zwischen der Kurbellängsachse und der Parallelogrammbasis werden als B bezeichnet, die entsprechende Punkte an der Plattform als C .

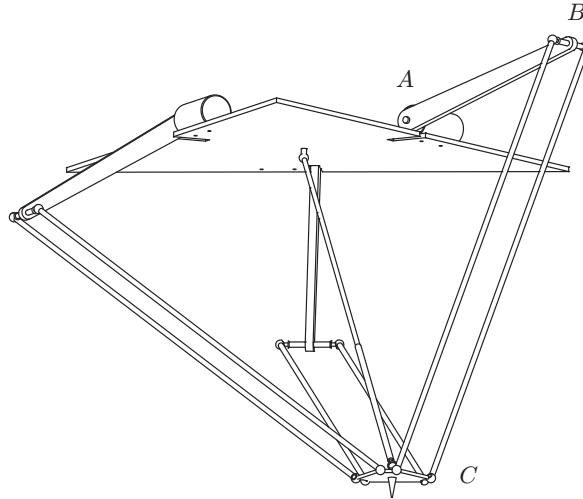


Abbildung 3: Übersicht über das Robotermodell

Die Antriebswinkel lauten q , die Position des Punktes P gegenüber dem Basiskoordinatensystem O , der mittig in der Plattform liegt, wird mit $p = [x, y, z]^T$ bezeichnet. Die vierte Achse lässt sich, da sie unabhängig von den ersten drei Achsen zu betrachten ist, einfach und getrennt modellieren. Ihr Posewinkel wird mit ϕ bezeichnet. Die entsprechenden Gleichungen finden Berücksichtigung in Anhang A.

2.1 Zwangsbedingungen

In der Abbildung 4 finden sich alle relevanten kinematischen Parameter und Formelzeichen. Die Parallelegramme sind für die Modellierung zu einem Stab zusammengefasst und der Plattform werden nur translatorische Freiheiten gewährt. Die Lage der Punkte B und C wird beschrieben durch:

$$B_{x,i} = (r_a + l_a \cos q_i) \cos \theta_i$$

$$B_{y,i} = (r_a + l_a \cos q_i) \sin \theta_i$$

$$B_{z,i} = -l_a \sin q_i$$

$$C_{x,i} = x + r_b \cos \theta_i$$

$$C_{y,i} = y + r_b \sin \theta_i$$

$$C_{z,i} = z$$

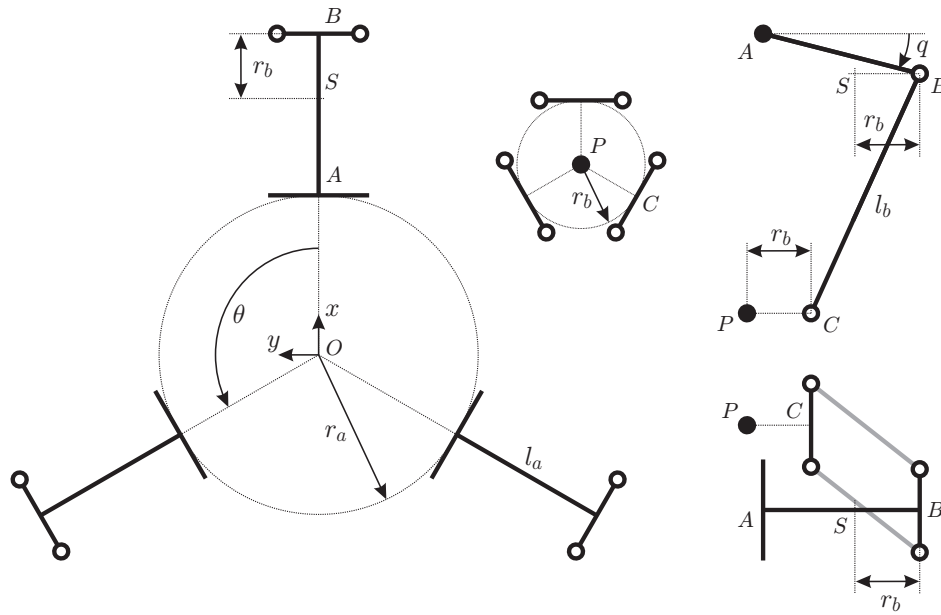


Abbildung 4: Relevante kinematische Größen

Der Verbindungsvektor zwischen den Punkten B und C ergibt sich demnach zu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_i B_i} &= \begin{bmatrix} (r_a + l_a \cos q_i) \cos \theta_i - r_b \cos \theta_i - x \\ (r_a + l_a \cos q_i) \sin \theta_i - r_b \sin \theta_i - y \\ -l_a \sin q_i - z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (r + l_a \cos q_i) \cos \theta_i - x \\ (r + l_a \cos q_i) \sin \theta_i - y \\ -l_a \sin q_i - z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit $r = r_a - r_b$ und $i = 1, 2, 3$.

Die Länge l_b des Parallelogramms ist konstant, somit ergibt sich mit

$$|\overrightarrow{C_i B_i}|^2 = l_b^2$$

die kinematische Zwangsbedingung:

$$f_i : [(r + l_a \cos q_i) \cos \theta_i - x]^2 + [(r + l_a \cos q_i) \sin \theta_i - y]^2 + [-l_a \sin q_i - z]^2 - l_b^2 = 0 \quad (1)$$

2.2 Direktes kinematisches Problem

Gleichung (1) beschreibt pro Kette eine Kugel, deren Mittelpunkt S von Punkt B_i um r_b parallel zur Ebene, in der die Antriebe liegen, in Richtung Arbeitsplattform verschoben ist. Damit liegt das Zentrum der Arbeitsplattform P im Schnitt der drei Kugeln ς_i :

$$\varsigma_i : (x - S_{x_i})^2 + (y - S_{y_i})^2 + (z - S_{z_i})^2 - l_b^2 = 0 \quad (2)$$

mit

$$S_{x_i} = (r + l_a \cos q_i) \cos \theta_i \quad (3)$$

$$S_{y_i} = (r + l_a \cos q_i) \sin \theta_i \quad (4)$$

$$S_{z_i} = -l_a \sin q_i \quad (5)$$

Um den Schnitt herbeizuführen, werden zunächst durch Subtraktion lineare Gleichungen gewonnen:

$$\epsilon_1 : \varsigma_1 - \varsigma_2 = u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4 = 0 \quad (6)$$

$$\epsilon_2 : \varsigma_1 - \varsigma_3 = v_1 x + v_2 y + v_3 z + v_4 = 0 \quad (7)$$

mit

$$u_1 := 2S_{x_2} - 2S_{x_1} \quad (8)$$

$$u_2 := 2S_{y_2} - 2S_{y_1} \quad (9)$$

$$u_3 := 2S_{z_2} - 2S_{z_1} \quad (10)$$

$$u_4 := -S_{z_2}^2 - S_{y_2}^2 - S_{x_2}^2 + S_{z_1}^2 + S_{y_1}^2 + S_{x_1}^2 \quad (11)$$

$$v_1 := 2S_{x_3} - 2S_{x_1} \quad (12)$$

$$v_2 := 2S_{y_3} - 2S_{y_1} \quad (13)$$

$$v_3 := 2S_{z_3} - 2S_{z_1} \quad (14)$$

$$v_4 := -S_{z_3}^2 - S_{y_3}^2 - S_{x_3}^2 + S_{z_1}^2 + S_{y_1}^2 + S_{x_1}^2 \quad (15)$$

Gleichungen (6) und (7) liefern durch Elimination:

$$x = w_1 z + w_2 \quad (16)$$

$$y = w_3 z + w_4 \quad (17)$$

mit

$$w_1 := \frac{v_2 u_3 - u_2 v_3}{v_1 u_2 - u_1 v_2} \quad (18)$$

$$w_2 := \frac{v_2 u_4 - u_2 v_4}{v_1 u_2 - u_1 v_2} \quad (19)$$

$$w_3 := \frac{-v_3 - v_1 w_1}{v_2} \quad (20)$$

$$w_4 := \frac{-v_4 - v_1 w_2}{v_2} \quad (21)$$

Einsetzen von (16) und (17) in (2) liefert die quadratische Gleichung in z

$$\begin{aligned} & (w_3 z + w_4 - S_{y_3})^2 + (w_1 z - S_{x_3} + w_2)^2 + (z - S_{z_3})^2 - l_b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & w_5 z^2 + w_6 z + w_7 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

mit

$$w_5 = w_3^2 + w_1^2 + 1 \quad (23)$$

$$w_6 = 2w_3 w_4 - 2S_{y_3} w_3 - 2S_{z_3} - 2w_1 S_{x_3} + 2w_1 w_2 \quad (24)$$

$$w_7 = -l_b^2 + w_4^2 - 2S_{y_3} w_4 + S_{z_3}^2 + S_{y_3}^2 + S_{x_3}^2 - 2w_2 S_{x_3} + w_2^2 \quad (25)$$

und der für die Delta-Kinematik relevanten Lösung:

$$z_w = \min \left(-\frac{w_6 \pm \sqrt{w_6^2 - 4w_5 w_7}}{2w_5} \right) \quad (26)$$

Das direkte kinematische Problem ist dann durch Resubstitution von (16) und (17) gelöst:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} w_1 z_w + w_2 \\ w_3 z_w + w_4 \\ z_w \end{bmatrix} \quad (27)$$

3 Differentialkinematik

Die Ableitungen der kinematischen Zwangsbedingungen (1) sind linear in $\dot{\mathbf{p}}$ und \dot{q}_i :

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dt} &= [2x - (2r + 2l_a \cos q_i) \cos \theta_i] \cdot \dot{x} \\ &+ [2y - (2r + 2l_a \cos q_i) \sin \theta_i] \cdot \dot{y} \\ &+ (2z + 2l_a \sin q_i) \cdot \dot{z} \\ &+ (2l_a \cos q_i \cdot z + 2l_a \sin q_i \cdot \sin \theta_i \cdot y \\ &+ 2l_a \sin q_i \cdot \cos \theta_i \cdot x + 2l_a r \sin q_i) \cdot \dot{q}_i \end{aligned} \quad (28)$$

$$+ 2l_a \sin q_i \cdot \cos \theta_i \cdot x + 2l_a r \sin q_i) \cdot \dot{q}_i \quad (29)$$

Damit lassen sich die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{p}}$ über das Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (30)$$

ermitteln mit:

$$J_{p_i,1} = 2x - (2r + 2l_a \cos q_i) \cos \theta_i \quad (31)$$

$$J_{p_i,2} = 2y - (2r + 2l_a \cos q_i) \sin \theta_i \quad (32)$$

$$J_{p_i,3} = 2z + 2l_a \sin q_i \quad (33)$$

$$J_{q_i,i} = -2l_a (\cos q_i \cdot z + \sin q_i \cdot \sin \theta_i \cdot y + \sin q_i \cdot \cos \theta_i \cdot x + r \sin q_i) \quad (34)$$

$$J_{q_i,j} = 0 \quad \forall i \neq j \quad (35)$$

Analog wird mit den zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f_i}{dt^2} = & [2x - (2r + 2l_a \cos q_i) \cos \theta_i] \cdot \ddot{x} \\
& + [2y - (2r + 2l_a \cos q_i) \sin \theta_i] \cdot \ddot{y} \\
& + (2z + 2l_a \sin q_i) \cdot \ddot{z} \\
& + 2\dot{z}^2 + 4l_a \cos q_i \cdot \dot{q}_i \dot{z} + 2l_a (\cos q_i \cdot \ddot{q}_i - \sin q_i \cdot \dot{q}_i^2) z \\
& + 2\dot{y}^2 + 4l_a \sin q_i \cdot \sin \theta_i \cdot \dot{q}_i \dot{y} + s_i \sin \theta_i \cdot y \\
& + 2\dot{x}^2 + 4l_a \sin q_i \cdot \cos \theta_i \cdot \dot{q}_i \dot{x} + s_i \cos \theta_i \cdot x \\
& - s_i r
\end{aligned} \tag{36}$$

mit

$$s_i := 2l_a (\sin q_i \cdot \ddot{q}_i + \cos q_i \cdot \dot{q}_i^2) \tag{37}$$

verfahren, um die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{p}}$ über das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{J}_p \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{h}(\ddot{\mathbf{q}}) \tag{38}$$

zu errechnen. Hierbei sind:

$$\begin{aligned}
h_i = & - \left[2\dot{z}^2 + 4l_a \cos q_i \cdot \dot{q}_i \dot{z} + 2l_a (\cos q_i \cdot \ddot{q}_i - \sin q_i \cdot \dot{q}_i^2) z \right. \\
& + 2\dot{y}^2 + 4l_a \sin q_i \cdot \sin \theta_i \cdot \dot{q}_i \dot{y} + s_i \sin \theta_i \cdot y \\
& \left. + 2\dot{x}^2 + 4l_a \sin q_i \cdot \cos \theta_i \cdot \dot{q}_i \dot{x} + s_i \cos \theta_i \cdot x - s_i r \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

Damit lassen sich die nötigen kartesischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Arbeitsplattform berechnen. Hierzu muss zunächst das direkte kinematische Problem (27) berechnet werden, um dann sukzessive (30) und (38) auszuwerten.

4 Implementierung und Validierung

Die Implementierung des direkt kinematischen Modells erfolgte durch Erweiterung der C++-Klasse `DeltaRobot`. Zur Validierung der Implementierung wurde ein numerisches Mehrkörper-Simulations-Modell des Delta-Roboters aufgebaut. Abbildung 5 zeigt das grafische Programm.

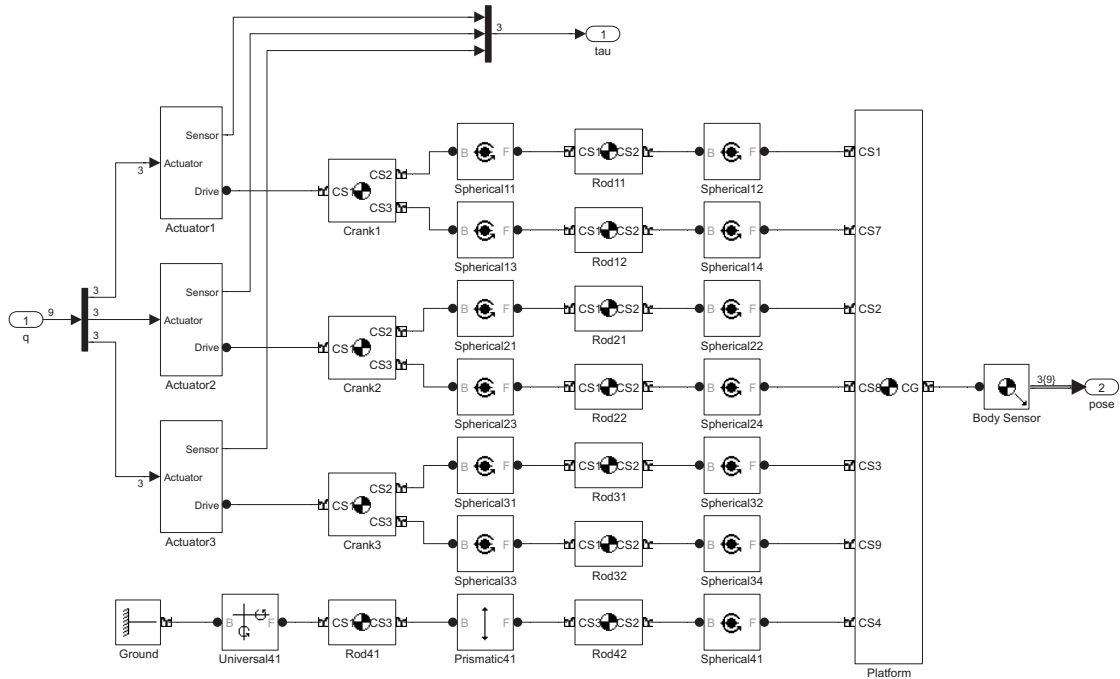


Abbildung 5: MKS-Modell des Delta-Roboters

Die Einbindung der `DeltaRobot`-Klasse erfolgte über einen Funktions-Wrapper, der mit dem Borland C/C++-Compiler Version 5.5 übersetzt wurde. Die Testtrajektorie weist, um eventuelle Fehler in den einzelnen Termen des dynamischen Modells gut identifizieren zu können, recht hohe Geschwindigkeiten (bis zu $8 \frac{m}{s}$) und Beschleunigungen (bis $24 \frac{m}{s^2}$) auf. Sie ist durch die Funktionen

$$x(t) = 0,25m \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(5 - 0,1) \cdot 2\pi}{10s^2} \cdot t^2 + 0,1 \cdot \frac{2\pi}{s} \cdot t\right) \quad (40)$$

$$y(t) = 0,25m \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(0,1 - 5) \cdot 2\pi}{10s^2} \cdot t^2 + 5 \cdot \frac{2\pi}{s} \cdot t\right) \quad (41)$$

$$z(t) = 0,1m \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{2\pi}{s} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) - 0,7556m \quad (42)$$

beschrieben. Abbildung 6 zeigt die Bahn im Raum, die so gewählt wurde, dass möglichst grosse Teile des Arbeitsraumes berücksichtigt werden.

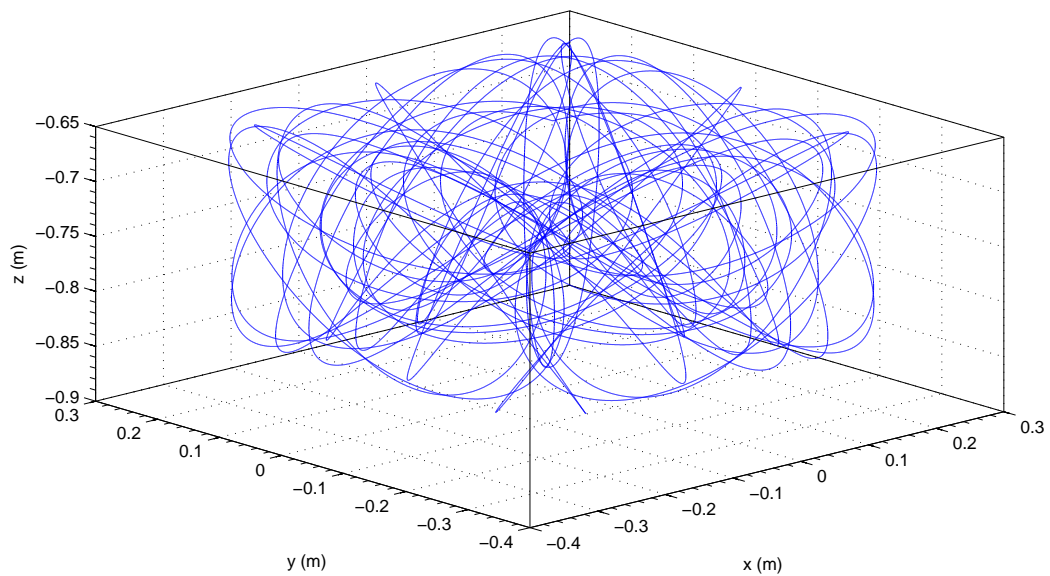


Abbildung 6: Testtrajektorie

Mit der gewählten Trajektorie kommt es zu Differenzen zwischen inverser und direkter Kinematik im Rahmen der numerischen Genauigkeit des verwendeten Rechners. Die Implementierung ist als fehlerfrei zu bewerten. Die Funktion des dynamischen Modells wurde erneut erfolgreich validiert.

A Modellierung der vierten Achse

Die direkte Kinematik der vierten Achse, die nicht mit den translatorischen Freiheiten verknüpft ist, kann über die Identität beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \phi & \dot{\phi} & \ddot{\phi} \end{bmatrix}^T = \mathbf{I}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} q_4 & \dot{q}_4 & \ddot{q}_4 \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

B Computeralgebra-Skripte

Die symbolischen Manipulationen wurden mit dem Computeralgebra-Paket MAXIMA in der Version 5.12.0 durchgeführt. Die Skripte zur Ausführung sind in den folgenden Abschnitten wiedergegeben.

Berechnung der direkten Kinematik:

```
kill(all);

sigma1: (x-S_x[1])^2 + (y-S_y[1])^2 + (z-S_z[1])^2 - l_b^2 = 0;
sigma2: (x-S_x[2])^2 + (y-S_y[2])^2 + (z-S_z[2])^2 - l_b^2 = 0;
sigma3: (x-S_x[3])^2 + (y-S_y[3])^2 + (z-S_z[3])^2 - l_b^2 = 0;
eqn1: ratsimp(sigma1-sigma2);
eqn2: ratsimp(sigma1-sigma3);

eps1: u[1]*x + u[2]*y + u[3]*z + u[4] = 0 ;
eps2: v[1]*x + v[2]*y + v[3]*z + v[4] = 0 ;
eqn3: linsolve([eps1, eps2], [x, y])[1];
x: w[1]*z + w[2];

eps2: v[1]*x + v[2]*y + v[3]*z + v[4] = 0 ;
solve(%,y)[1];
y: w[2]*z + w[3];

sigma3: (x-S_x[3])^2 + (y-S_y[3])^2 + (z-S_z[3])^2 - l_b^2 = 0;
ratsimp(%);

sigma3: w[5]*z^2 + w[6]*z + w[7]=0;
solve(sigma3, z);
```

Ableitungen der kinematischen Zwangsbedingungen:

```
kill(all);
depends(x,t,y,t,z,t,q,t);

f: ((r+l_a*cos(q[i]))*cos(the)-x)^2 +
((r+l_a*cos(q[i]))*sin(the)-y)^2 +
(-l_a*sin(q[i])-z)^2 - l_b^2;

expand(diff(f,t));
trigsimp(%);

expand(diff(diff(f,t),t));
trigsimp(%);
```